Corrigé Exercice 1 (2024 – Centres Etrangers Groupe 1 – Jour 1)

1. **a.** Résolvons, dans $[0\,;\,1]$, l'équation demandée :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 2x\mathrm{e}^{-x} = x \\ &\iff 2x\mathrm{e}^{-x} - x = 0 \\ &\iff x(2\mathrm{e}^{-x} - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{-x} = 1 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{2} \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln(2) \end{aligned}$$

Or, 0 et $\ln(2)$ sont deux réels dans $[0; 1]$ (en effet, la stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}^{*+}$ donne : $1 < 2 < \mathrm{e} \Longrightarrow 0 < \ln(2) < 1$).

L'équation a donc deux solutions dans $[0\,;\,1]$: 0 et $\ln(2)$.

b. f est dérivable sur $[0\,;\,1]$, en tant que composée et produit de fonctions qui pourraient être définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in [0;1],\quad f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x} + (2x) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (2 - 2x)\mathrm{e}^{-x} = 2(1 - x)\mathrm{e}^{-x}$.

On arrive donc à l'expression demandée.

c. On sait que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$. On a : $f(0) = 2 \times 0\mathrm{e}^{-0} = 0$ et $f(1) = 2 \times 1\mathrm{e}^{-1} = 2\mathrm{e}^{-1}$.

On peut donc établir le tableau de variations de la fonction :

x	0		1
signe de 2		+	
signe de $(1-x)$		+	0
signe de e^{-x}		+	
signe de $f'(x)$		+	0
variations de f	0	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-1}$

2. **a.** *Initialisation :* Calculons u_1. $u_1 = f(u_0) = f(0,1) = 2 \times 0,1\text{e}^{-0,1} \approx 0,18$.

On constate que l'inégalité est vraie pour $n = 0$, on a bien : $0 \leqslant u_0 < u_1 \leqslant 1$.

Hérédité : Pour un entier naturel k donné, on suppose que l'inégalité $0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 1$ est vraie.

Montrons que l'inégalité sera vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 1 &\Longrightarrow f(0) \leqslant f(u_k) < f(u_{k+1}) \leqslant f(1) \\ &\qquad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur } [0;1] \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant 2\text{e}^{-1} \\ &\qquad \text{car } f \text{ est la fonction de récurrence de la suite } (u_n) \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant 1 \\ &\qquad \text{car } 2\text{e}^{-1} \approx 0,74 < 1 \end{aligned}$$

Ainsi, la véracité de l'inégalité est héréditaire.

Conclusion : L'inégalité est vraie au rang 0, et sa véracité est héréditaire pour tout entier naturel, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.

b. On a notamment :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc (strictement) croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$. La suite (u_n) est donc bornée par 0 et 1.

La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est donc convergente, vers une limite ℓ vérifiant $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $[0;1]$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

D'après la question **1. a.**, cette équation n'a que deux solutions dans $[0;1]$: 0 et $\ln(2)$, or la suite est (strictement) croissante, donc minorée par son premier terme : $u_0 = 0,1$, donc la limite ne saurait être inférieure à 0,1 : la possibilité d'avoir $\ell = 0$ est donc écartée, et finalement, l'unique valeur possible pour ℓ est donc $\ln(2)$.

La suite (u_n) converge donc vers $\ln(2)$.

4. **a.** La suite (u_n) est croissante et converge vers $\ln(2)$, donc elle est majorée par $ln(2)$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ln(2) \Longrightarrow \ln(2) - u_n \geqslant 0$.

Pour tout entier naturel n, la différence $\ln(2) - u_n$ est bien positive.

b. Un terme de la suite (u_n) sera donc toujours une valeur approchée par défaut de $\ln(2)$. Si on veut que la valeur approchée soit à 10^{-4} près, cela signifie que la différence entre u_n, la valeur approchée, et $\ln(2)$ doit être inférieure ou égale à 10^{-4}.

On va donc explorer les termes consécutifs de la suite (u_n) tant que $\ln(2) - u_n > 0{,}0001$, de sorte que la boucle s'interrompra dès que la différence deviendra inférieure ou égale à $10^{-4} = 0{,}0001$.

Le script ci-dessous convient (à condition d'avoir importé les fonctions `exp` et `log` qui est la fonction logarithme népérien, de la librairie `math`, au préalable).

On a dans ce corrigé ajouté les deux lignes qui rendent le programme exécutable

```
from math import exp
from math import log as ln
def seuil():
  n=0
  u=0.1
  while ln(2) - u > 0.0001:
    n=n+1
    u=2*u*exp(-u)
  return(u,n)
```

Remarque : on peut aussi importer la constante d'Euler de la librairie maths et utiliser une variante : `from math import e` en lieu et place de la première ligne et `u=2*u*e**(-u)` ou `u=2*u/(e**u)` pour l'avant dernière.

c. $n = 11$

Corrigé Exercice 2 (2024 – Centres Etrangers Groupe 1 – Jour 1)

1. Soit $f(x) = k$ une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ solution de (E_0).

   On a donc $f' = f$ soit $0 = k$.

   L'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est donc la fonction nulle.

2. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions de la forme

   $f(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Pour tout réel x on a : $h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$.

   D'autre part : $h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x) =$
   $\cos(x) - 2\sin(x)$

   d'où pour tout réel x, $h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$, c'est à dire, h est solution de l'équation différentielle (E).

4. Supposons que f soit une solution de (E).

   Pour tout réel x on a :

   $$\begin{aligned}(f-h)'(x) = f'(x) - h'(x) &\implies (f-h)'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) - (h(x) - \cos(x) - 3\sin(x))\\ &\qquad \text{car } f \text{ et } h \text{ sont solutions de } (E)\\ &\implies (f-h)'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) - h(x) + \cos(x) + 3\sin(x)\\ &\implies (f-h)'(x) = f(x) - h(x) = (f-h)(x)\end{aligned}$$

   Donc $f - h$ est solution de (E_0)

   Réciproquement : supposons que $f - h$ soit solution de (E_0)

   On a donc $(f-h)'(x) = f(x) - h(x)$ soit $f'(x) - h'(x) = f(x) - h(x)$

   D'où : $f'(x) = f(x) - h(x) + h'(x) = f(x) - h(x) + h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$ car h est solution de (E)

   Donc : $f'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$ c'est à dire f est solution de (E).

   Conclusion : f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_0).

5. On a donc $f(x) - h(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$

   Toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions

   $f(x) = Ce^x + 2\cos(x) + \sin(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$

6. g est solution de l'équation différentielle (E) donc il existe un réel C tel que

$g(x) = C\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)$.

De plus $g(0) = 0$ donc $g(0) = C\mathrm{e}^0 + 2\cos(0) + \sin(0) = 0$.

D'où $C \times 1 + 2 \times 1 + 0 = 0 \iff C = -2$

On a donc : $\quad g(x) = -2\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)$.

7. Calculons : $\quad I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right) \mathrm{d}x = \Big[-2\mathrm{e}^x - \cos(x) + 2\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-2\mathrm{e}^0 - \cos(0) + 2\sin(0)\right)$$

$$I = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - 0 + 2 \times 1 - (-2 - 1 + 2 \times 0) = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 2 + 3 = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 5$$